

## ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТКАЗОВ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ ЭЛЕКТРОНИКИ

А. А. Авакян, А. Г. Дмитриенко

Первичным функциональным элементом электроники является схемотехнический элемент (резистор, конденсатор, индуктивность). Структура схемотехнического элемента является достаточно сложной системой, состоящей из внутренних элементов, которыми в подавляющем большинстве являются такие элементы, как проводники конечного объема в некоторой объемной диэлектрической среде. В частности, все схемотехнические элементы в технологии КМОП выполняются в кристалле кремния путем создания проводников в оксиде кремния посредством светолитографии со схемотехнического шаблона.

В описанных выше первичных элементах электроники возможны только два вида отказов:

- разрыв в элементарном, достаточно малом, объеме проводника;
- пробой диэлектрика в некотором достаточно малом объеме.

Тогда физическая модель отказа схемотехнического элемента может быть представлена в виде следующего процесса. Полный обрыв проводника или пробой в диэлектрической среде возникает только после некоторого накопления элементарных обрывов или пробоев, приводящих к лавинообразному (практически мгновенному) процессу обрыва всего проводника или пробоя диэлектрика. Причинами локальных обрывов в проводнике и пробоев в диэлектрике могут быть либо отклонение от точного технологического процесса производства схемотехнического элемента, либо старение структуры. Поскольку как первый, так и второй процессы случайны, то и процесс отказов схемотехнических элементов будет также случайным.

На основании рассмотренной физической модели можно создать следующую математическую модель отказа схемотехнического элемента. Поскольку эта модель будет также стохастической, то математическая модель отказа будет иметь вид закона распределения отказов схемотехнического элемента.

Событие, заключающееся в элементарной деградации кристалла в области схемотехнического элемента, возникающее в случайные моменты времени, обозначим через  $E_i$ . При каждом событии  $E_i$  возникает случайная величина деградации  $\xi_i(t)$ . Примем за период наблюдения за состоянием кристалла один час. Сделаем предположение, что за период одного часа не может произойти более одного события  $E_i$ . Согласно справочным данным, средний период между отказами схемотехнического элемента составляет сотни миллиардов и более часов. Следовательно, вероятность возникновения более одного события  $E_i$  за один час можно принять равной нулю. Вероятность того, что в каком-нибудь из часов наблюдений (обозначим этот час через момент  $t$ ) возникнет событие  $E_i$ , будет равна произвольной величине  $p$ , а вероятность отсутствия события  $E_i$  в этот момент равна  $q = 1 - p$ . При этом имеет место соотношение ( $0 \leq p \leq 1$ ). Описанная выше распределенная случайная величина деградации  $\xi_i(t)$  называется бинарным законом распределения, который имеет следующее математическое выражение:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{если событие } E_i \text{ имело место в } i\text{-м повторении} \\ & \text{наблюдения (эксперимента) и возникла случайная} \\ & \text{величина } x_i \text{ (соответствующая вероятность равна } P); \\ 0 & \text{если событие } E_i \text{ не произошло в } i\text{-м повторении} \\ & \text{наблюдения (эксперимента) и случайная величина } x_i \\ & \text{не возникла (соответствующая вероятность равна } q = 1 - P). \end{cases} \quad (1)$$

Введем понятие случайного события  $E_r$ , заключающегося в том, что при  $n$  повторений наблюдения возникнет ровно  $r$  случайных событий  $E_i$ , которые приводят к отказу схемотехниче-

ского элемента. Этот отказ происходит в случайный момент  $t_r$ , когда возникает последний из  $r$  случайных событий  $E_i$ . Случайную величину – отказ схемотехнического элемента – обозначим  $\xi_r(t_r)$ . Вероятность появления случайной величины  $\xi_r(t_r)$  при независимых  $n$  испытаниях, одним из множества возможных способов равна вероятности появления события  $E_i$  в  $r$  испытаниях и не появления события  $E_i$  в  $n-r$  испытаниях. По теореме умножения эта вероятность равна

$$p^r * q^{n-r}. \quad (2)$$

Число всевозможных способов появления случайной величины  $\xi_r(t_r)$  при  $n$  испытаниях равно  $C_n^r$ . Тогда вероятность появления отказа схемотехнического элемента равна

$$P_n(r) = P(\xi_r(t_r) = r) = C_n^r p^r q^{n-r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}, \quad (3)$$

где  $t_r$  есть непрерывная случайная величина – наработка схемотехнического элемента до отказа;  $r = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Закон распределения (3) называется биномиальным законом распределения вероятностей [1, 2], так как члены ряда в формуле (3) являются членами ряда бинома Ньютона, имеющего следующий вид:

$$(p + q)^n. \quad (4)$$

Определим математическое ожидание и вероятное отклонение случайных величин  $\xi_r(t_r)$  по известным формулам [1, 2] и законам распределения вероятностей случайных величин  $\xi_i(t)$  (1) и  $\xi_r(t_r)$  (3):

$$M[\xi_i(t)] = p, D[\xi_i(t)] = \sqrt{pq}; \quad (5)$$

$$M[\xi_r(t)] = np, D[\xi_r(t)] = \sqrt{npq}.$$

Интегральная (центральная) предельная теорема Муавра – Лапласа гласит: если  $r$  есть число наступления событий  $E_i$  в  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность этого события равна  $p$ , причем  $0 < p < 1$ , то равномерно относительно  $a$  и  $b$  ( $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ ) при  $n \rightarrow \infty$  имеет место соотношение:

$$P < a \leq \frac{r - np}{\sqrt{npq}} \leq b \rangle \rightarrow \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}. \quad (6)$$

Сходимость биномиального закона распределения к нормальному показана в [1, с. 226], где приведены совместные графики:

- нормированного биномиального для  $n$ , равного 5 и 30, при  $P = 0,3$ ;
- нормального распределения.

Из (6) видно, что при количестве накоплений  $n$  элементарных изменений, стремящихся к бесконечности, в проводнике или диэлектрике будет возникать лавинообразный пробой во всем диэлектрике или разрыв во всем проводнике, что приведет к отказу схемотехнического электронного элемента. При этом биномиальный закон распределения случайной величины  $\xi(t)$  стремится к нормальному закону. Как видно из (5), математическое ожидание и вероятное отклонение этой случайной величины стремятся также к бесконечности, что не является адекватным физическому процессу отказов схемотехнического электронного элемента. Адекватность математической модели реальному физическому процессу может быть достигнута следующим образом.

Схемотехнический электронный элемент, например транзистор, относительно таких его элементов, как области проводников и диэлектриков, является достаточно сложной системой. Однородные области, относительно которых при возникновении события  $E_i$  возникает случайная величина  $\xi(t)$ , в разных элементах системы, какой является схемотехнический элемент, имеют различные вероятности бинарных событий  $p$ , (обозначим их через  $p_j$ ), а также различные (достаточно большие, но конечные) значения величин (обозначим их через  $n_j$ ), а случайную величину,

возникающую при этом, обозначим через  $\xi_j(t)$ . Соответственно математические ожидания и вероятные отклонения этих случайных величин будут равны

$$M[\xi_j(t)] = n_j p_j, D[\xi_j(t)] = \sqrt{n_j p_j q_j}.$$

Отказы схмотехнических элементов будут происходить при различных комбинациях возникновения случайных величин  $\xi_j(t)$ , но поскольку распределение вероятностей каждой из них будет близко к нормальному, то согласно теореме Ляпунова [1, 2] различные комбинации из сумм этих случайных величин будут иметь нормальное распределение вероятностей с некоторыми интегральными параметрами  $T$  и  $\sigma$ . Поскольку в отрицательной области временной оси отказы не существуют, то распределение вероятностей отказов схмотехнических элементов электроники будет подчинено усеченно-нормальному закону:

$$f(t) = \frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-T}{\sigma}\right)^2}, \quad (7)$$

где  $t > 0$ .

Величина  $C$  является коэффициентом усечения и определяется из условия, что интеграл от плотности (7) в пределах от 0 до  $\infty$  равен единице, т.е.:

$$C = \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-T}{\sigma}\right)^2} dt}. \quad (8)$$

Чтобы подтвердить адекватность рассмотренного гипотетического процесса реальному физическому процессу возникновения отказов элементов электроники, оценим порядок соотношения между параметрами законов распределения отказов систем и элементов электроники. Распределение отказов электронного элемента и устройства подчинены экспоненциальному закону [3–7], а вероятности отказа элемента  $Q_3$  и устройства КБО  $Q_y$ , состоящего из  $N_y$  элементов, описываются следующими выражениями:

$$Q_3 = 1 - e^{-\lambda_3 t}, \quad (9)$$

$$Q_E = 1 - e^{-N_y \lambda_3 t}. \quad (10)$$

Оценим величину вероятности безотказной работы схмотехнических элементов электронных систем исходя из вероятности безотказной работы электронного устройства. Как правило, электронные устройства состоят из плат, которые, в свою очередь, состоят из микросхем и монтажных элементов. Современные микросхемы, выполненные на монокристаллах по технологии КМОП, имеют в своем составе сотни тысяч и более схмотехнических электронных элементов (транзисторов, конденсаторов, резисторов и т.п.). Общее количество схмотехнических элементов в устройствах электроники  $N_y$  достигает десятков миллионов и более единиц. В то же время практика показывает, что вероятность отказа на час наработки (налета) устройств электроники  $Q_y(1_q)$  (эта величина численно равна интенсивности отказов) имеет порядок  $10^{-3}$ – $10^{-4}$  отказов в час. Сделаем следующее упрощение в структуре устройств электроники, которое не отразится на оценке. Допустим, что вероятности отказов всех схмотехнических элементов электронного устройства одинаковы, а их количество максимально и равно  $10^6$ . Допустим, что вероятность отказа электронного устройства минимальна и равна  $10^{-4}$  отказа за час наработки (налета) [4–7]. Очевидно, что эти допущения приведут к максимальной оценке вероятности отказа усредненного схмотехнического элемента  $Q_3$ . Формула, связывающая  $Q_3$  и  $Q_y$ , имеет следующий вид:

$$Q_3(1) = 1 - e^{-\frac{Ln(1-Q_y(1))}{N_y}}. \quad (11)$$

Подставив в (11)  $Q_y(1) = 10^{-4}$ ,  $N_y = 10^6$ , получим  $Q_3(1) = 1,0005 \cdot 10^{-10}$ . Следовательно, значения вероятностей отказов схмотехнических элементов устройств электроники за один час нара-

ботки не превышают  $10^{-10}$  отказа на 1 ч. Заметим, что согласно формуле (7), рассчитанная вероятность отказа на 1 ч наработки (налета) является оценкой плотности вероятности в точке 0,5 ч на интервале 1 ч, т.е.:

$$Q_3(1_{\text{час}}) = f(0,5) = \frac{F(1_{\text{час}})}{1_{\text{час}}} = \lambda_3 = 10^{-10} \text{ отказов за 1 ч.} \quad (12)$$

На основании (7) и (12) запишем следующее соотношение:

$$\frac{C}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{0,5-T}{\sigma}\right)^2} = 10^{-10}. \quad (13)$$

Из (8) и (13) видно, что система уравнений относительно  $C$ ,  $T$  и  $\sigma$  неразрешима, поскольку в двух уравнениях три неизвестных параметра. Для разрешения этой системы сделаем следующее допущение, которое хорошо согласуется со справочными данными по отказам схмотехнических элементов электроники и впоследствии будет обосновано теоретически:

$$T = \frac{1}{Q_3} = \frac{1}{f(0,5)} = 10^{10} \text{ ч.} \quad (14)$$

Подставив это значение в выражения (8) и (13), получим:

$$C = 1,000000003 = 1, \sigma = 0,5869 \cdot 10^{10}. \quad (15)$$

Анализируя этот результат, можно заключить, что при таких больших математических ожиданиях нормальное распределение практически не усечено и вероятное отклонение  $\sigma$  составляет около 60 % от математического ожидания.

Формула интенсивности отказов  $\lambda(t)$  имеет следующий вид [2]:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{P(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)}. \quad (16)$$

Как видно из формулы (16), интенсивность отказов является плотностью вероятности возникновения отказов относительно множества исправных устройств, а не всего множества функционирующих устройств.

Подставив в формулу (7) значения  $T$  из (14),  $C$  и  $\sigma$  из (15), запишем следующие формулы для расчета плотности вероятностей усредненного схмотехнического элемента электронных систем при определенных выше параметрах усеченно-нормального закона распределения:

$$f(t) = \frac{1}{0,59 \cdot 10^{10} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-10^{10}}{0,59 \cdot 10^{10}}\right)^2}. \quad (17)$$

Подставив в формулу (16)  $T$  из (14),  $C$  и  $\sigma$  из (15), запишем следующие формулы для расчета интенсивности отказов усредненного схмотехнического элемента электронных систем при определенных выше параметрах усеченно-нормального закона распределения:

$$\lambda(t) = \frac{1}{0,59 \cdot 10^{10} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-10^{10}}{0,59 \cdot 10^{10}}\right)^2} \cdot \left( 1 - \frac{0,59 \cdot 10^{10} \sqrt{2\pi}}{\int_0^t e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-10^{10}}{0,59 \cdot 10^{10}}\right)^2} dt} \right). \quad (18)$$

Рассчитанные по формулам (17) и (18) значения  $f(t)$  и  $\lambda(t)$  для значений наработки (налета) областей: глубокого морального старения электронной аппаратуры от 0 до  $10^6$  ч (более 100 лет); период физического старения аппаратуры (массовых отказов) от  $0,510^{10}$  до  $1,510^{10}$  ч, сведены в табл. 1 и отображены на графиках рис. 1.

Таблица 1

Результаты расчета  $f(t)$ ,  $\lambda(t)$  по формулам (17) и (18)

[illegible]

Из таблицы и графиков видно, что на участке до одного миллиона часов (сто лет) плотность распределения вероятностей и интенсивность отказов равны и постоянны. В области старения аппаратуры наблюдается резкий рост интенсивности отказов (в 15 раз) при максимуме возрастания плотности распределения вероятностей отказов в 4,27 раза.

На рис. 1 представлены графики изменения плотности распределения вероятностей отказов  $f(t)$  и значения интенсивности отказов  $l(t)$ .

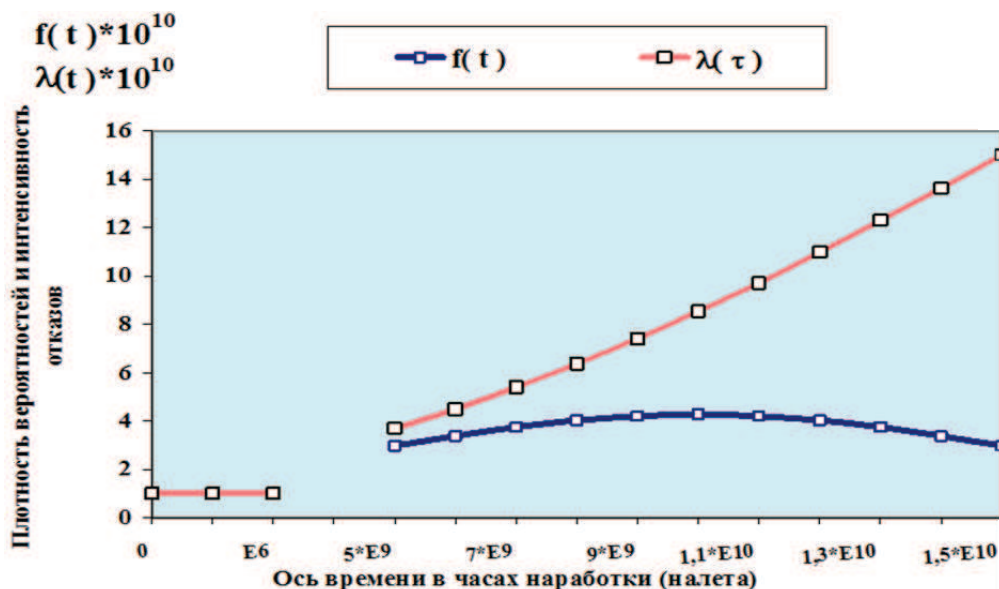


Рис. 1. Плотность распределения вероятностей возникновения отказов  $f(t)$  и интенсивности отказов  $l(t)$

Таким образом, описанная выше физическая модель отказа схмотехнического элемента с применением центральной предельной теоремы позволяет утверждать, что распределение отказов схмотехнического элемента подчиняется усеченно-нормальному закону и что на участке до одного миллиона часов (сто лет) плотность распределения вероятностей и интенсивность отказов

равны и постоянны. Следовательно, эксплуатация схмотехнических элементов КБО практически осуществляется на стационарном участке интенсивности отказов [8].

### Список литературы

1. Крамер, Г. Математические методы статистики / Г. Крамер ; под ред. А. Н. Колмогорова. – М. : Мир, 1975. – 648 с.
2. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1988. – 451 с.
3. Гнеденко, Б. В. Математические методы в теории надежности / Б. В. Гнеденко, Ю. К. Беляев, А. Д. Соловьев. – М. : Наука, 1965. – 524 с.
4. Авакян, А. А. Модели функциональных и несовместных отказов комплексов бортового оборудования и генерации на ЭВМ характеристик отказобезопасности / А. А. Авакян, О. Н. Реутов // Авиакосмическая техника и технология. – 1996. – № 2. – С. 265–269.
5. Авакян, А. А. Методика № 564-91-VIII «Автоматизированного расчетного анализа безотказности и оценка отказобезопасности сложных комплексов бортового оборудования» / А. А. Авакян, О. Н. Реутов, В. С. Никифоров. – Жуковский : Изд-во НИИ АО, 1991.
6. Авакян, А. А. Анализ надежности многофункциональных систем на стадиях проектирования и сертификации / А. А. Авакян, О. Н. Реутов // Методы и средства оценки и повышения надежности приборов, устройств и систем : тр. междунар. науч.-техн. конф. – Пенза, 1993. – С. 253–258.
7. Авакян, А. А. Отчет № 78-02-XVI «Оценка и анализ эксплуатационно-экономических характеристик и необходимого количества обменного фонда комплекса АРИА-200М для обеспечения регулярности полетов самолета БЕ-200ЧС» / А. А. Авакян, Р. Д. Искандаров, М. В. Копненко. – Жуковский : Изд-во ОАО НИИАО, 2008. – 263 с.
8. Авакян, А. А. Создание отказоустойчивых систем электроники на основе управляющей избыточности / А. А. Авакян, Н. К. Юрков // Надежность и качество – 2011 : труды междунар. симп. : в 2 т. / под ред. Н. К. Юркова. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2011. – Т. 2. – С. 369–375.

УДК 519.24.001:512,643,5

**Авакян, А. А.**

**Закон распределения отказов элементов и систем электроники** / А. А. Авакян, А. Г. Дмитриенко // Надежность и качество сложных систем. – 2013. – № 1. – С. 47–53.

**Авакян Александр Анушаванович**

доктор технических наук,  
главный научный сотрудник,  
ОАО «НИИ авиационного оборудования»  
140180, г. Жуковский Московской области,  
ул. Туполева, 18.  
(495) 556-23-22  
E-mail: info@niifi.ru

**Дмитриенко Алексей Геннадьевич**

кандидат технических наук, генеральный директор,  
ОАО «Научно-исследовательский институт  
физических измерений»,  
440026, г. Пенза, ул. Володарского, 8/10.  
(8412) 56-55-63  
E-mail: info@niifi.ru

**Аннотация.** Рассмотрена структура схмотехнического элемента электроники. Показано, что в основе физической модели отказа схмотехнического элемента лежат бинарные события двух видов: разрыв проводника и пробой диэлектрика. Физическая модель отказа формализована в виде бинарного и биномиального законов распределения отказов. Посредством предельной теоремы Ляпунова доказано, что закон распределения отказов элементов и систем электроники является нормальным. Получены оценки математического ожидания и вероятного отклонения отказов схмотехнических элементов электроники.

**A. Avakyan**

doctor of technical science, the main scientific worker  
Institute of Aircraft Equipment  
140180, Zhukovskiy Moskovskoy region,  
Tupolev street, 18.  
(495) 556-23-22  
E-mail: info@niifi.ru

**A. Dmitrienko**

candidate of technical sciences,  
director general of public corporation  
«Scientific-research Institute  
of physical measurements»  
440026, Penza, Volodarskoy street, 8/10.  
(8412) 56-55-63  
E-mail: info@niifi.ru

**Abstract.** A structure of an electronic circuit element is considered. It is shown that the physical failure model for a circuit element is based on two types of binary events: a conductor break and a dielectric breakdown. The physical failure model is formalized in the form of the binary failure distribution law and the binomial failure distribution law. It is proved with the Lyapunov limit theorem that the failure distribution law for electronics components and systems is normal. Estimates of expectations and probable deviation of failures are obtained for electronic circuit elements.

**Ключевые слова:** электроника, элемент, вероятность, математическое ожидание, дисперсия, случайная величина, закон распределения, нормальный закон, бинарный закон, биномиальный закон, экспоненциальный закон.

**Key words:** electronics, element, probability, expectation, dispersion, random quantity, distribution law, normal law, binary law, binomial law, exponential law.